线性代数　中国科学技术大学 2023 春
二次型

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

实对称矩阵的相合标准形

性质 (正交相合标准形)

设 n 阶实对称矩阵 A 的全体特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 则存在正交矩阵 P 使得

$$P^TAP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

从而矩阵 A 相合于对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. 称这个对角阵为 A 的正交相合标准形.

定理 (相合规范形)

设 A 为实对称矩阵, 则存在可逆阵 P 使得

$$P^TAP=\mathrm{diag}(I_r,-I_s,0). \qquad (A \text{ 的相合规范形})$$

其中 r,s 由 A 唯一确定不依赖于 P 的选取, 且满足

$$r+s=\mathrm{rank}(A)\le n.$$

称 r 为 A 的正惯性指数, 称 s 为 A 的负惯性指数, 称 $r-s$ 为 A 的符号差.

二次型的定义

定义 ((实) 二次型)

称实数域上的二次齐次多项式为(实) 二次型.

利用矩阵的乘法, 任意二次型可唯一的写为

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx, \tag{1}$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 实对称, $x=(x_1,x_2,,\cdots,x_n)^T$ 为变元组成的列向量.

性质 (二次型的矩阵)

1. 式(1)中的实对称矩阵 A 由二次型 $Q(x_1,\cdots,x_n)$ 唯一确定, 称 A 为二次型 Q 的矩阵. 此外, 称 A 的秩为二次型 Q 的秩, 称 A 的特征值为二次型 Q 的特征值.
2. 反之, 对于任意实对称矩阵, 通过式(1), 可以构造一个二次型.

简言之, 我们有如下一一对应:

$$\text{二次型} \xleftrightarrow[1:1]{Q=x^TAx} \text{实对称矩阵}$$

给定二次型

$$Q = Q(x_1, \cdots, x_n) = x^T Ax. \qquad (A^T = A),$$

做可逆变量替换 $x = Py$, 则

$$Q = x^T Ax = (y^T P^T)A(Py) = y^T(P^T AP)y.$$

因此, 二次型 Q 关于新变元 $y_1, \cdots, y_n$ 的矩阵为 $P^T AP$.
通过变元的线性替换, 实对称矩阵的相合标准形可以用来化简二次型.

定义 ((有理) 标准形)

若二次型经过非退化的线性变换 $x = Py$ 化为

$$\widetilde{Q}(y_1, \cdots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

则称 $\widetilde{Q}$ 为 Q 的一个(有理) 标准形.

下面通过对称矩阵的正交合同标准形和规范形, 给出两个特殊的 (有理) 标准形:

定理 (正交标准形)

任意给定实二次型 $Q = x^T Ax$, 存在正交变换 $x = Py$ 将 Q 化为

$$\widetilde{Q}(y_1, \cdots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

这里的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值. 称 $\widetilde{Q}$ 为 Q 的正交标准形.

规范形 (实标准形)

定理 (规范形 (实标准形))

任意给定二次型 Q, 存在线性变换 $x = Py$ 使得

$$Q = y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2,$$

其中 r 和 s 不依赖于 P 的选取. 我们称

- $y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2$ 为 Q 的规范形(或实标准形);
- r 和 s 为 Q 的正负惯性指数.

定理 (配方法能用矩阵实现的理论依据)

对于任意给定的实对称矩阵 A 都存在初等矩阵 $P_1, \cdots, P_r$ 使得

$$P_r^T \cdots P_1^T A P_1 \cdots P_r = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n).$$

第一步:

1. 若 $a_{11} \neq 0$,
   - 将第 1 列的 $-a_{i1}a_{11}^{-1}$ 倍加到第 i 列;
   - 将第 1 行的 $-a_{1i}a_{11}^{-1}$ 倍加到第 i 行.

   $\Rightarrow$ 可逆阵 P_1 使得 $P_1^TAP_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$.
2. 若 $a_{11} = 0$, 且存在对角元 $a_{ii} \neq 0$.
   - 交换第 1 列与第 i 列;
   - 交换第 1 行与第 i 行;
   - 回到第一步.
3. 若对角线全为零且第一行 (第一列) 不为零. 即, 存在 $i = 2, \cdots, n$ 使得 $a_{i1} = a_{1i} \neq 0$.
   - 将第 i 行加到第一行;
   - 将第 i 列加到第一列;
   - 回到第一步.
4. 若对角线全为零且第一行和第一列全为零. 则 $A = \begin{pmatrix} 0 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$.

第二步: 递归下去, 对 $n-1$ 阶矩阵 A_{n-1} 重复第一步.

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对 } I \text{ 做初等列变换}]{\text{对 } A \text{ 做成对的行列初等变换}} \begin{pmatrix} P^TAP \\ P \end{pmatrix}$$

类似的

$$(A, I) \xrightarrow[\text{对 } I \text{ 做初等行变换}]{\text{对 } A \text{ 做成对的行列初等变换}} (P^TAP, P^T)$$

例

$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$

解： $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2c_1 \to c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{c_2 \to c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

从而得标准形 $\widetilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例

$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3.$

解： $(A,I)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2\to r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\to c_1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-c_1\to c_3]{-\frac{1}{2}c_1\to c_2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1\to r_3]{-\frac{1}{2}r_1\to r_2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_1\to r_3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2c_1\to c_3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

从而得到标准形

$$\widetilde{Q}(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2.$$

其中

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

正定二次型

定义 (正定二次型)

称一个 n 元二次型 $Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx(A^T=A)$ 为正定二次型, 如果对于任意向量 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 都有 $Q(x_1,\cdots,x_n)>0$ 成立.

定理

$$\begin{aligned} Q \text{ 正定} &\Leftrightarrow A \text{ 正定} \Leftrightarrow A \text{ 相合于单位阵} \\ &\Leftrightarrow Q \text{ 的 (或 } A \text{ 的) 正惯性指数为 } n \end{aligned}$$

正定性判定

性质

设 A 为 n 阶实对称方阵.

1. 若 P 可逆, 则 $P^TAP > 0$ 当且仅当 $A > 0$.　　相合不变性
2. $A > 0$ 当且仅当存在可逆阵 P 使得 $A = P^TP$.　相合标准形
3. 若 $A > 0$, 则 $\det(A) > 0$.

定理

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实对称方阵. 则 A 正定当且仅当 A 的各阶顺序主子式均大于零. 即, A 正定当且仅当

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A > 0,$$

证明思路: 对阶数归纳. 由归纳假设 A 可写为 $A = \begin{pmatrix} (P^{-1})^TP^{-1} & C \\ C^T & a_{nn} \end{pmatrix}$. 记 $R = \begin{pmatrix} P & -PP^TC \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $R^TAR = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & a_{nn} - C^TPP^TC \end{pmatrix}$.

例:判定 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 的正定性.

根据正负惯性指数命名二次型

1. 正　定 $\Leftrightarrow r = n\,(\Rightarrow s = 0)$;
2. 半正定 $\Leftrightarrow s = 0$;
3. 负　定 $\Leftrightarrow s = n\,(\Rightarrow r = 0)$;
4. 半负定 $\Leftrightarrow r = 0$;
5. 不　定 $\Leftrightarrow r \geq 1$ 且 $s \geq 1$.

部分关于正定的结论可以平移到半正定, 负定, 半负定的二次型上.

二次曲线的标准形式

$$\begin{cases} \text{椭\quad 圆:} & \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \text{双曲线:} & \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \text{抛物线:} & y=ax^2 \\ \text{退\quad 化:} & x^2=\frac{y^2}{a^2}\text{ 或}\frac{x^2}{a^2}=1\text{ 或}x^2=0 \end{cases}$$

平面二次曲线方程:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0.$$

定理

任意平面二次曲线均可经过选定合适的直角坐标系变为标准形式.

证明思路: 通过正交变换化简为 (其中 λ_1, λ_2 不全为零)

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2b_1x'+2b_2'y'+c'=0.$$

1. $\lambda_1\lambda_2>0$ 椭圆型
2. $\lambda_1\lambda_2<0$ 双曲型或退化
3. $\lambda_1\lambda_2=0$ 抛物型或退化